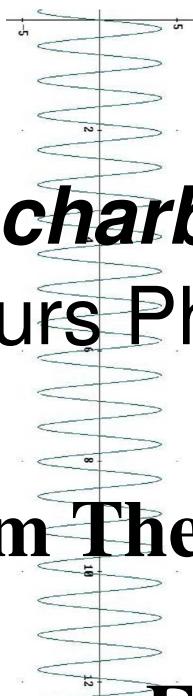
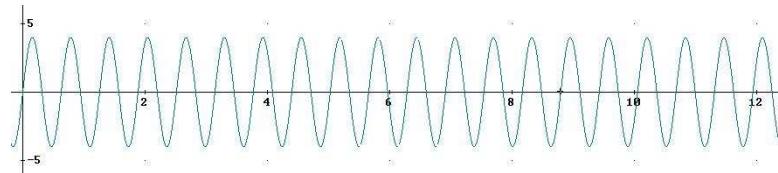


Ratsgymnasium Rotenburg
Gerberstraße 14
27356 Rotenburg Wümme

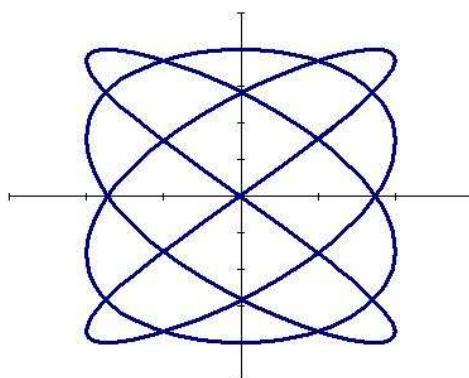


Facharbeit

im Leistungskurs Physik

zum Thema

Lissajous-Figuren



Verfasser: Christoph Siemsen

Fachlehrer: Herr Konrad

Abgabetermin: 24.05.04

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	2
2. Was sind Lissajous-Figuren?.....	2
3. Biographie: Jules Antoine Lissajous.....	3
4. Darstellung von Lissajous-Figuren.....	3
4.1 Darstellung mit dem Pendel.....	4
4.2. Darstellung mit einem Oszillographen	5
4.2.1 Phasenverschiebungen.....	5
4.2.2 Betrachtung rationaler und unrationaler Frequenzverhältnisse.....	6
5. Vergleich beider Darstellungsarten	6
6. Fazit.....	7
7. Anhang.....	8

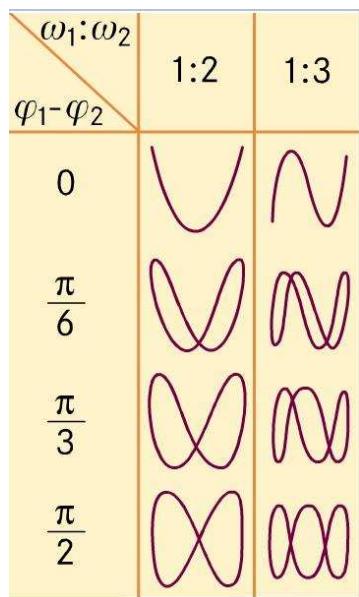
1. Einleitung

In meiner Facharbeit möchte ich mich mit den sogenannten Lissajous-Figuren beschäftigen und zwei Arten der Darstellung dieser miteinander vergleichen. Zum einen können die Figuren mit einem Lissajous-Pendel und zum anderen mit einem Oszillographen dargestellt werden. An Hand der genaueren Betrachtung dieser beiden möglichen Darstellungsarten, werde ich versuchen herauszufinden, ob Lissajous-Figuren eher eine theoretische oder praktische Anwendung in der Physik finden. Theoretisch meint in diesem Falle, dass die Figuren zum großen Teil nur mit dem Oszillographen, also künstlich erzeugt werden können. Wohingegen praktisch bedeutet, dass eine Vielzahl der Figuren auch mit dem Pendel erzeugt werden können und es somit auch theoretisch möglich ist, dass die Figuren in der Natur auftreten.

2. Was sind Lissajous-Figuren?

Lissajous-Figuren sind Formen, die bei der Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehenden Schwingungen entstehen. Sie sind nach ihrem Entdecker Jules Antoine Lissajous benannt. Die Formen sind abhängig von der Phasendifferenz ($\varphi_1 - \varphi_2$) und dem Verhältnis der Frequenzen ($\omega_1 : \omega_2$) zueinander.

Hier nun einmal eine kleine Übersicht der einfachsten Lissajous-Figuren.



3. Biographie: Jules Antoine Lissajous

Jules Antoine Lissajous wurde am 4. März 1822 in Versailles geboren. Mit 19 Jahren besuchte er die „Ecole Normale Supérieure“, nachdem er diese abgeschlossen hatte, wurde er Professor für Mathematik am „Lycée Saint-Louis“. 1874 wurde Lissajous Schulleiter an der Akademie in Chambéry, dieses Amt legte er jedoch ein Jahr später nieder und nahm das ihm angebotene Amt des Schulleiters der Akademie in Besançon an. Am 24. Juni 1880 starb Lissajous im Alter von 58 Jahren in Plombières. Bekannt wurde er durch die Entdeckung der nach ihm benannten Lissajous-Figuren.



4. Darstellung von Lissajous-Figuren

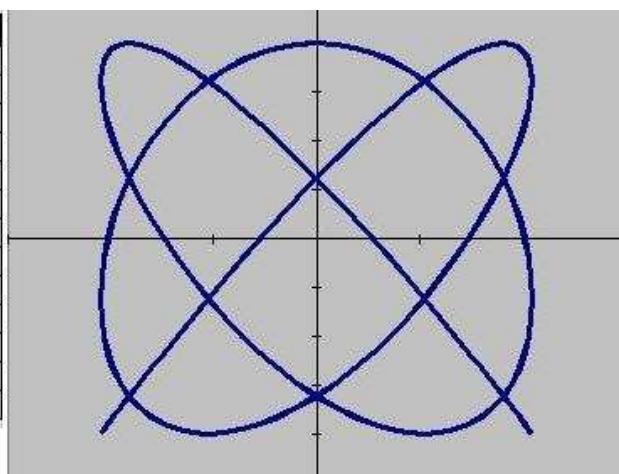
Die Darstellung von Lissajous-Figuren ist etwas komplizierter als die Darstellung einer einfachen Schwingung, da es für die meisten Lissajous-Figuren keine konkrete Formel gibt, die diese beschreibt. Trotz lassen sich alle Lissajous-Figuren auf gleiche Weise darstellen. Zuerst berechnet man die Funktionswerte der jeweiligen Ausgangsschwingung. Nun verhält es sich so, dass die Funktionswerte der waagerecht verlaufenden Schwingung als x-Werte und die der vertikal verlaufenden Schwingung als y-Werte verwendet werden. Mit Hilfe dieser Methode ist es möglich alle Lissajous-Figuren in einem Graphen darzustellen.

Hier ein Beispiel für die eben genannte Art der Darstellung:

$$f_1(t) = 21 \cdot \sin(20t + 45)$$

$$f_2(t) = 20 \cdot \sin(24t)$$

t	x	y
0	17,87	0,00
1	17,36	-18,11
2	-3,70	-15,37
3	-20,38	5,08
4	-12,94	19,67
5	9,82	11,61
6	20,95	-9,82
7	7,28	-19,94
8	-15,01	-7,10
9	-19,53	13,92
10	-0,93	18,91
...
360	9,83	11,62



4.1 Darstellung mit dem Pendel

Die Lissajous-Figuren lassen sich sehr gut mit einem sogenannten Sandpendel darstellen.

Das Sandpendel ist ein Pendel, dass über einer Sandfläche hängt und mit einer Spitze seinen Weg in den Sand zeichnet. Das Pendel muss so aufgehängt werden, dass es sich frei in alle Richtungen bewegen kann und vor allem mittig über der Sandfläche hängt.

Das Pendel wird erst zum Schwingen in eine Richtung gebracht, dann wird es zusätzlich senkrecht zur ersten Schwingung angestoßen. Eigentlich schwingt das Pendel nun in zwei Richtungen, doch zeichnet es in den Sand eine komplexe Figur, eine Lissajous-Figur. Ich habe zwar ein Paar Lissajous-Figuren mit Hilfe des Versuchs aufnehmen können, jedoch war es mir nicht möglich alle Lissajous-Figuren zu zeigen, da ich z.B. keine irrationalen Frequenzverhältnisse und auch keine genauen Phasendifferenzen erzeugen konnte.



Mein Lissajous-Pendel



Eine aufgenommene Lissajous-Figur

4.2. Darstellung mit einem Oszillographen

Wesentlich besser lassen sich die Lissajous-Figuren jedoch mit zwei Frequenzgeneratoren in Verbindung mit einem Oszillographen darstellen. Die beiden Frequenzgeneratoren werden an je einen Eingang des Oszillographen angeschlossen. Nun muss man den Oszillographen nur noch so einstellen, dass die beiden Signale senkrecht (nach Lissajous) überlagert werden, damit auf dem Oszillographen die Lissajous-Figuren zu sehen sind. Jetzt kann man mit den Frequenzgeneratoren alle möglichen Frequenzverhältnisse herstellen und so alle möglichen Lissajous-Figuren auf dem Oszillographen darstellen.



4.2.1 Phasenverschiebungen

Wie schon erwähnt sind Lissajous-Figuren abhängig von der Phasendifferenz der sich überlagernden Schwingungen. Diese Phasendifferenz wirkt sich insofern auf die Figur aus, dass sie sich zwar im Grunde genommen, solange die Frequenzen gleich bleiben, nicht verändert, sondern sich vielmehr bewegt. Also verändert man die Phasendifferenz dreht bzw. verschiebt sich die eigentliche Lissajous-Figur, was in meinen Versuchen am Oszillographen sehr gut zu erkennen war. Die Phasendifferenz veränderte sich scheinbar stetig und dadurch, obwohl ich die Frequenzen nicht verändert habe, hat sich das Bild auf dem Oszillographen ständig verändert bzw. bewegt. Um dies besser zu zeigen habe ich von einigen Versuchen Bilder gemacht, die im Anhang zu finden sind. An diesen Bildern lässt sich sehr gut die Bewegung der jeweiligen Figur erkennen.

4.2.2 Betrachtung rationaler und unrationaler Frequenzverhältnisse

Die Lissajous-Figuren sind außerdem auch von dem Verhältnis der Frequenzen zueinander abhängig. So ergeben sich geschlossene Figuren nur, wenn das Verhältnis der Frequenzen rational ist, andernfalls endet die Schwingung nie und füllt das Rechteck nahezu komplett aus. Dieses Rechteck, auf dem sich die Figur abzeichnet ist, genauso wie die Figur selbst abhängig von den Ausgangsschwingungen. Die eine Seite ist gleich der Amplitude der ersten Schwingung und die zweite Seite ist gleich der Amplitude der zweiten Schwingung. Dies habe ich durch einstellen der Amplitude am Oszillographen versucht auszugleichen um ein Quadrat zu erhalten.

5. Vergleich beider Darstellungsarten

Im Weiterem möchte ich nun die beiden Darstellungsarten miteinander vergleichen. Wie im Vorangegangen festgestellt, können die Lissajous-Figuren zum einen mit einem Pendel, zum anderen mit Frequenzgeneratoren und einem Oszillographen dargestellt werden. Betrachtet man jedoch die beiden Darstellungsarten etwas genauer ist festzustellen, dass mit dem Pendel leider nur eine begrenzte Reihe von Lissajous-Figuren darstellbar ist. Das röhrt daher, dass mit dem Pendel nur eine geringe Anzahl von Frequenzen erzeugt werden kann und es nicht sehr wahrscheinlich bzw. schlecht möglich ist ein irrationales Frequenzverhältnis zu erzeugen. Außerdem ist es nicht möglich die Frequenzen eindeutig zu bestimmen. Doch die Darstellung mit dem Pendel hat auch einen Vorteil, da sich beim Pendel nicht wie beim Oszillographen die Phasendifferenz ständig ändert, sondern immer den Ausgangswert beibehält, erhält man genau eine stehende Figur. Aber auch hier ist wieder etwas am Pendel zu bemängeln, es ist leider nicht möglich die Phasendifferenz eindeutig zu bestimmen.

Die Darstellung mit dem Oszillographen ist insofern zu bevorzugen, dass sich die Frequenzen genau einstellen lassen und jegliche Frequenzverhältnisse erzeugt werden können. Dadurch ist es möglich sämtliche Lissajous-Figuren zu erzeugen. Aber auch diese Art der Darstellung hat einen Nachteil, die Phasenverschiebung ändert sich leider ständig (bzw. sie läuft von 0° bis 360° und dann wieder von Vorne), was leider dazu führt das die Figur ständig in Bewegung ist, wodurch bei gleichbleibenden Frequenzen theoretisch gleich 360 verschiedene Lissajous-Figuren ergeben. Wobei zu vermuten ist, dass mehr als 360 Figuren entstehen, da man auch genauso gut immer nur um ein halbes Grad mit der Phasenverschiebung oder sogar mit noch kleineren Schritten weiter gehen könnte, dadurch würde theoretisch gesehen sogar eine unendliche Anzahl von Lissajous-Figuren schon alleine durch die Veränderung der Phasendifferenz entstehen.

Den Nachteil des Oszillographen kann man aber mit einer kleinen Zusatzfunktion des Oszillographen in begrenztem Umfang kompensieren. Es ist möglich das Oszillographenbild zu stoppen bzw. es zu speichern. Dadurch wird zwar die Bewegung gestoppt, doch ist es nicht möglich die Phasendifferenz direkt an der Figur abzulesen. Obwohl man natürlich die Möglichkeit hat die Schwingungen auf dem Oszillographen nebeneinander darzustellen und somit die Phasenverschiebung direkt abzulesen.

Beide Darstellungsarten haben also ihre Vor- und Nachteile, doch überwiegen beim Pendel leider die Nachteile, beim Oszillographen hingegen überwiegen die Vorteile.

6. Fazit

Aus dem Vergleich der beiden Darstellungsarten ist hervorgegangen, dass die Darstellung mit dem Oszillographen zur genauen Untersuchung der Lissajous-Figuren auf ihre Abhängigkeit von der Phasendifferenz und dem Frequenzverhältnis geeignet ist. Trotz allem ist aber das Pendel genau so gut geeignet um Lissajous-Figuren darzustellen.

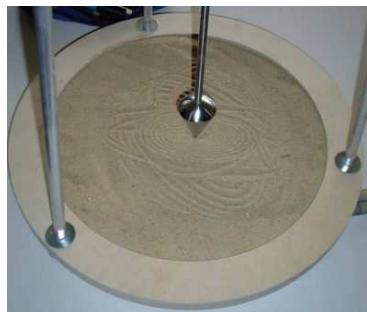
Das Pendel ist meiner Meinung nach zur besseren Veranschaulichung der Lissajous-Figuren geeignet, da die Figuren mit einem geringerem Aufwand und mit einem praktischen Bezug dargestellt werden.

Um nun auf mein in der Einleitung formuliertes Ziel dieser Facharbeit, der Frage nach Theorie oder Praxis zurückzukommen. Ich bin zu dem Schluss gekommen, dass die Figuren zu einem großem Teil nur theoretische Anwendung z.B. in der Frequenztechnik zum Vergleich von Frequenzen finden. Jedoch finden auch einige Lissajous-Figuren eine praktische Anwendung, sie können mit einem einfachen Pendel dargestellt werden, was die Vermutung zulässt, dass diese Figuren auch in der Natur auftreten können.

7. Anhang

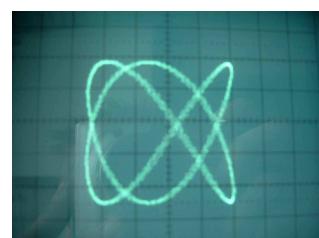
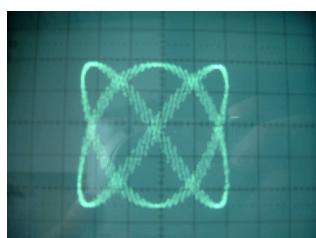
1. Versuche

Pendel

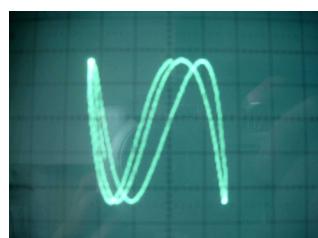
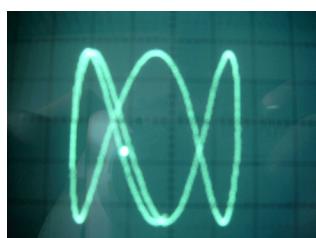


Oszilloskop

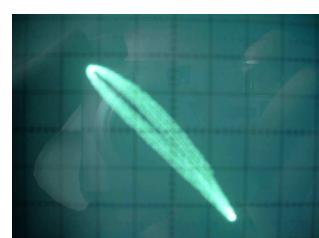
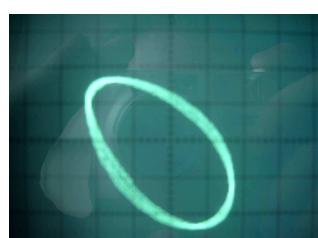
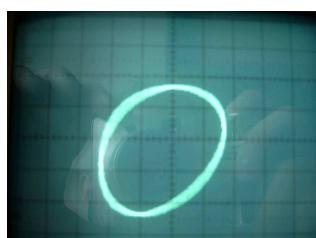
$F_1 = 560\text{Hz}$ $F_2 = 860\text{Hz}$ $\omega_1 : \omega_2 = 0,65$



$F_1 = 30\text{Hz}$ $F_2 = 85\text{Hz}$ $\omega_1 : \omega_2 = 0,35$



$F_1 = 84\text{Hz}$ $F_2 = 85\text{Hz}$ $\omega_1 : \omega_2 = 0,99$



$F_1 = 350\text{Hz}$ $F_2 = 875\text{Hz}$ $\omega_1 : \omega_2 = 0,4$

